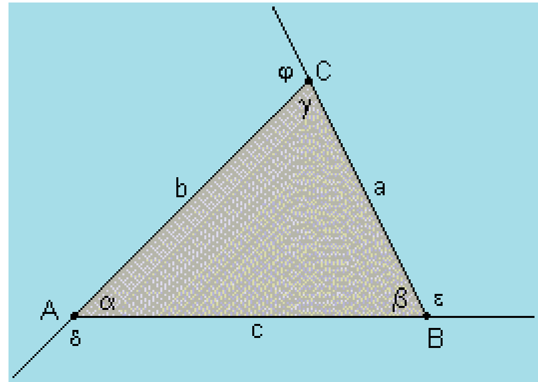
El Triángulo, es el polígono (o figura plana y cerrada) de tres lados. Sus elementos son: Vértice : A , B , C; Lados : a , b , c y Ángulos : α, β, γ y estos ángulos internos suman 180° , es decir:

$$\alpha + \beta + \gamma = 180°$$



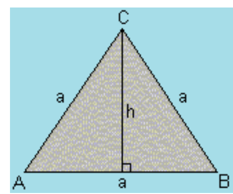
Por otro lado, el triángulo se clasifica según sus lados y según sus ángulos.

Clasificación de los Triángulos

Según sus Lados (a, b, c)

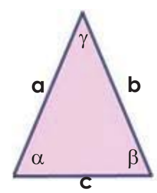
Equilátero

Todos los lados iguales
$a = b = c$



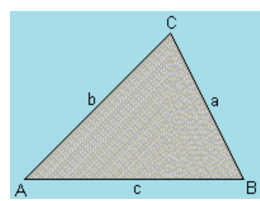
Isósceles

Un lado distinto
$a = b \neq c$
y
$\alpha = \beta \neq \gamma$



Escaleno

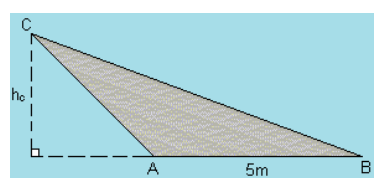
Todos los lados desiguales
$a \neq b \neq c$
y
$\alpha \neq \beta \neq \gamma$



Según sus ángulos interiores (α, β, γ)

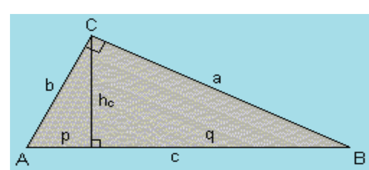
Acutángulo

Tres ángulos agudos
$\alpha, \beta, \gamma < 90°$



Rectángulo

Un ángulo recto
$\alpha = 90°$ entre a y b
Teorema de **Pitágoras**
Relaciona todos los lados de un triángulo rectángulo:

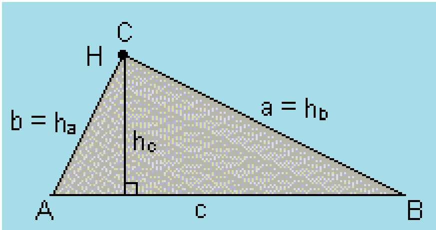


$a^2 + b^2 = c^2$, donde Hipotenusa : c y Catetos : a y b

Obtusángulo Un ángulo obtuso Ejemplos: $\alpha > 90°$

◊ A ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊

π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π



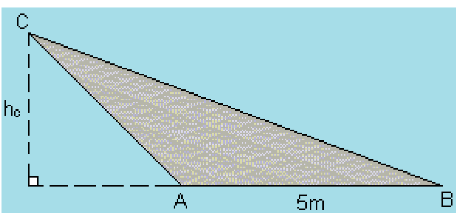
La altura **(h)** de un triángulo se obtiene al trazar una línea perpendicular desde el vértice al lado opuesto o a la prolongación de éste. Ese lado, es considerado la base **(b)** del triángulo.

En base a lo anterior,

El área del triángulo es: $A_{triángulo} = \dfrac{b \cdot h}{2}$ y

Entonces el perímetro es: $P_{triágulo} = a + b + c$

Ejemplo



Calcula el área de un $\triangle$ABC cuya altura en es igual a 3 m y de base $\overline{AB}$ = 5 m. Además, determina el perímetro si CA = 4,5 m y BC = 9 m

Solución

El área de un triángulo se define como $A_{triángulo} = \dfrac{b \cdot h}{2}$, donde la altura es $h_c = 3m$ y la base es b = 5 m, entonces reemplazando:

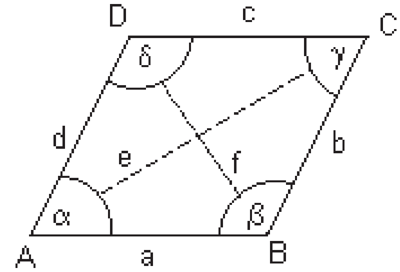
$$A = \frac{3\ m * 5\ m}{2} = 15\ m^2 \checkmark$$

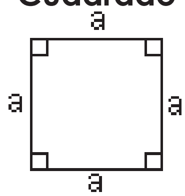
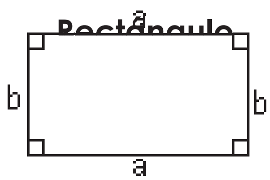
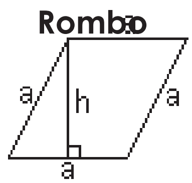
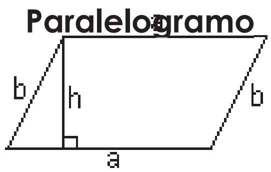
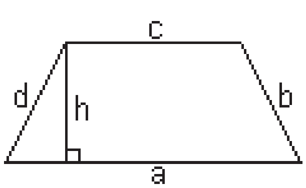
El perímetro del triángulo es: $P = \overline{CA} + \overline{AB} + \overline{BC}$ y al sustituir se tiene que:

$$P = 4{,}5\ m + 5\ m + 9\ m = 18{,}5\ m \checkmark$$

◊ A ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊
π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π

Los Cuadriláteros, son polígonos (o figura plana cerrada) de cuatro lados. Sus elementos son: Vértices: A, B, C, D ; Lados : a, b, c, d ; Diagonales : e, f y Ángulos : $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ donde $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$. Los cuadriláteros se clasifican de la siguiente manera: Paralelogramo, Trapecios y Trapezoides. Acá se muestran algunos de ellos con sus áreas y perímetros.



Cuadrilátero	Perímetro	Área
Cuadrado 	$P_{cuadrado} = 4 \cdot a$	$A_{cuadrado} = a^2$ $A = \frac{d^2}{2}$ d : diagonal
Rectángulo 	$P_{rectángulo} = 2 \cdot (a + b)$	$A_{rectángulo} = a \cdot b$
Rombo 	$P = 4 \cdot a$	$A = a \cdot h = \frac{(e+f)}{2}$ e, f: diagonales
Romboide o Paralelogramo 	$P_{romboide} = 2 \cdot (a + b)$	$A_{romboide} = a \cdot h$
Trapecio 	$P = a + b + c + d$	$A = \frac{(a+c)}{2} \cdot h$ $\frac{(a+c)}{2}$: mediana

◊ A ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊
π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π

Ejemplo

Un campo rectangular tiene 170 m de base y 28 m de altura. Calcular el perímetro, las hectáreas que tiene y el precio del campo si el metro cuadrado cuesta 150 BsF.

170 m

28 m

Solución

- Los datos son: b = 170 m, h = 28 m; Precio = 150 BsF/ m^2
- El perímetro es la suma de sus lados **$P_{rectángulo}$ = b + b + h + h = 2.b + 2.h**

evaluando tenemos que: **$P_{rectángulo}$ = 2*170 m + 2*28 m = 340 m + 56 m**

(Recuerda que el perímetro es una longitud y se mide en **m**)

$P_{rectángulo}$ = 396 m ✓

- El área de un rectángulo es **$A_{rectángulo}$= b* h**, recordando que en medidas agrarias las superficies de campo tienen como referencia un cuadrado de 100 m de lado, así **1 hectárea = 10000 m²**, entonces

$$A_{rectángulo} = 170\ m * 28\ m = 4760\ m^2 \cdot \frac{1\ hectárea}{10000\ m^2} = 0{,}476\ hectárea\ ✓$$

- Finalmente, el precio del campo es:

$$Precio\ Campo = \frac{150\ BsF}{m^2} \cdot 4760\ m^2 = 714000\ BsF\ ✓$$

Actividad de Control:

Resuélvelos todos!!, son cortos y fácil de analizar.

- Calcula el número de baldosas cuadradas, de 10 cm, de lado que se necesitan para enlosar una superficie rectangular de 4 m de base y 9 m de altura.
- Hallar el área de un triángulo rectángulo isósceles cuyos lados miden 10 cm cada uno.
- El perímetro de un triángulo equilátero mide 0.9 dm y la altura mide 25.95 cm. Calcula el área del triángulo.

◊ A ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊
π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π

- Calcula el número de árboles que pueden plantarse en un terreno rectangular de 32 m de largo y 30 m de ancho si cada planta necesita para desarrollarse 4 m^2.

- El área de un trapecio es 120 m^2, la altura 8 m, y la base menor mide 10 m. ¿Cuánto mide la otra base?

- Calcular el área de un paralelogramo cuya altura mide 2 cm y su base mide 3 veces más que su altura.

- Calcula el área de un rombo cuya diagonal mayor mide 10 cm y cuya diagonal menor es la mitad de la mayor.

- En el centro de un jardín cuadrado de 150 m de lado hay una piscina también cuadrada, de 25 m de largo. Calcula el área del jardín.

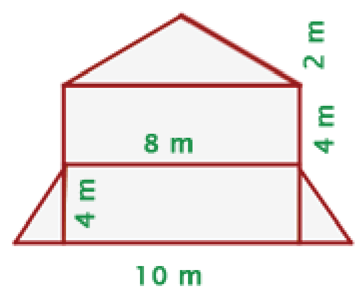
- Calcula el área del cuadrado que resulta de unir los puntos medios de los lados de un rectángulo cuya base y altura miden 8 y 6 cm.

- Cuánto vale el área de la parte subrayada de la figura, si el área del hexágono es de 96 cm^2.

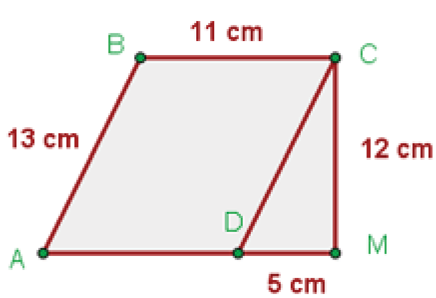
- Una zona boscosa tiene forma de trapecio, cuyas bases miden 128 m y 92 m. La anchura de la zona mide 40 m. Se construye un paseo de 4 m de ancho perpendicular a las dos bases. Calcula el área de la zona arbolada que queda.

- Un jardín rectangular tiene por dimensiones 30 m y 20 m. El jardín está atravesado por dos caminos perpendiculares que forman una cruz. Uno tiene un ancho de 8 dm y el otro 7 dm. Calcula el área del jardín.

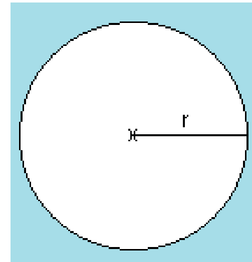
- Calcula la cantidad de pintura necesaria para pintar la fachada de este edificio sabiendo que se gastan 0.5 kg de pintura por m^2.



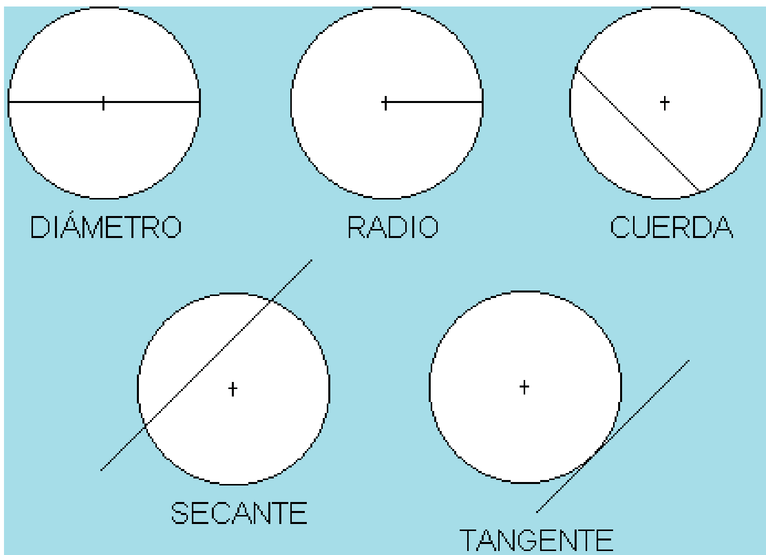
- Hallar el perímetro y el área de la figura:

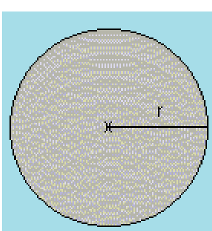


4.2. Círculo y Circunferencia

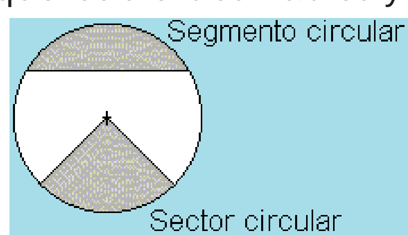


La Circunferencia, es el lugar geométrico de todos los puntos que conforman esta figura y que equidistan de un punto llamado centro de la circunferencia. Los elementos de una circunferencia comprenden al Radio (R ó r: distancia desde el centro de la circunferencia y la línea del contorno), Diámetro (D: el doble del valor del radio, D = 2*r), Cuerda, Secante y Tangente





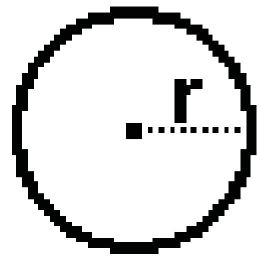
El Círculo, representa la zona achurada, es el área delimitada por el contorno curvo denominada circunferencia. Los elementos de un círculo abraca el Segmento Circular que es el área o zona comprendida en un arco de la circunferencia y una recta secante; y el Sector Circular que cubre dos Radios y un arco de la circunferencia. Es de hacer notar que el arco es un segmento de la circunferencia.



En los cálculos de área de la superficie de figuras circulares aparece el valor del número irracional Pi (π). El número Pi, es la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro. Algo más de ello lo encuentras en http://es.wikipedia.org/wiki/Geometr%C3%ADa_sagrada y/o en http://webs.adam.es/rllorens/pihome.htm

De esta forma en:

Circunferencia **Perímetro (P_o):** $P_o = 2 * \pi * r$



Área (A_o): **NO TIENE**

Círculo **Perímetro (P_o):** $P_o = 2 * \pi * r$

Área (A_o): $A_o = \pi * r^2$

Ejemplo:
Determina la longitud de la circunferencia y el área de un círculo de 30 cm de diámetro.

Solución

- Datos: $\pi = 3{,}141592$; **D = 30 cm**, como el r = D / 2, entonces **r = 15 cm.**
- La longitud de la circunferencia es el mismo perímetro

$$P_{circunferencia} = 2 * \pi * r$$

entonces: $P_{circunferencia} = 2 * \pi * 15\ cm = 3{,}141592 * 30\ cm = 94{,}2477\ cm$

$$P_{circunferencia} = 94{,}25\ cm$$ ✓

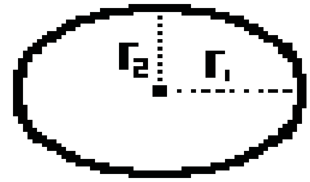
- El área del círculo es: $A_{círculo} = \pi * r^2$ y sustituyendo valores se tiene que:

$$A_{círculo} = \pi * (15cm)^2 = 3{,}141592 * 225\ cm^2$$

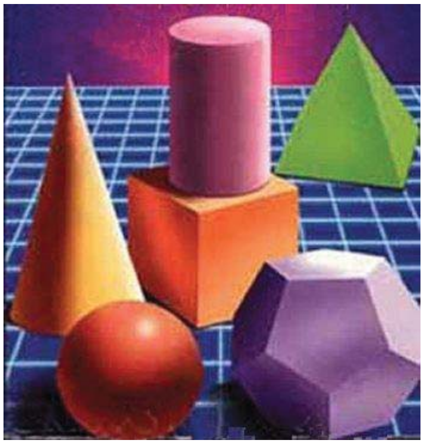
$$A_{círculo} = 706{,}86 cm^2$$ ✓

La Elipse, es una variación de un círculo ya que posee dos radios: r_1 y r_2

Así $Área_{elipse} = \pi * r_1 * r_2$



5. Los cuerpos geométricos.



Los cuerpos geométricos, son todas aquellas figuras que tienen TRES DIMENSIONES (anchura, altura y profundidad) o, lo que es lo mismo, volumen o capacidad, ocupando un lugar en el espacio.

Las partes básicas de un cuerpo geométrico son: bases, caras laterales y altura.

Las figuras geométricas más importantes son; prisma, pirámide, cilindro, cono y esfera.

5.1 Prismas

Un prisma es una figura geométrica formada por varios paralelogramos iguales llamados caras laterales, y dos polígonos iguales y paralelos llamados bases. Los prismas se denominan según sean sus bases:

- Prisma **triangular** (sus bases son triángulos)
- Prisma **cuadrangular** (sus bases son cuadrados)
- Prisma **pentagonal** (sus bases son pentágonos)

El **área** de la **superficie de un prisma** es la suma de las superficies de todas sus caras:

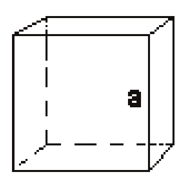
$$A_{\text{prisma}} = (\text{perímetro de la base x altura}) + (\text{área de la base x 2})$$

El **volumen** de un prisma se calcula con la siguiente expresión:

$$V_{\text{prisma}} = A_{\text{de la base}} \text{ x altura}$$

Cubo

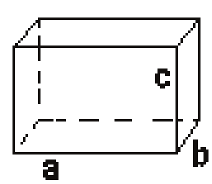
$A_{cubo} = 6 \cdot a^2$ $\quad$ $V_{cubo} = a^3$



Ortoedro o Paralelepípedo

$A_{\text{paralelepípedo}} = 2 \cdot (a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c)$

$V_{\text{paralelepípedo}} = a \cdot b \cdot c$

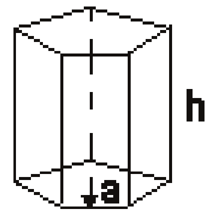


◊ A ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊
π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π

Prisma recto

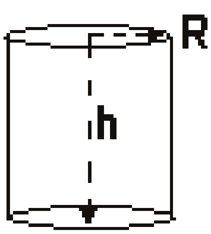
$A_{\text{prisma recto}} = P \cdot (h + a)$

$V_{\text{prisma recto}} = A_B \cdot h$ (3)



5.2. Cilindros

Un cilindro es la figura geométrica que se obtiene al hacer girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados. El **área** de la **superficie** de esta figura geométrica resulta de la suma de las superficies de todas sus caras, así que será necesario el desarrollo del cilindro, que es un rectángulo y dos círculos. De esta forma su fórmula es:



$Á_{\text{total cilindro}} = (A_{\text{rectángulo}}) + (2 \times A_{\text{círculo}})$

$A_{\text{total cilindro}} = [2 * \pi * R * h] + (2 * \pi * R^2)$

Obteniendo factor común $2 * \pi * R$

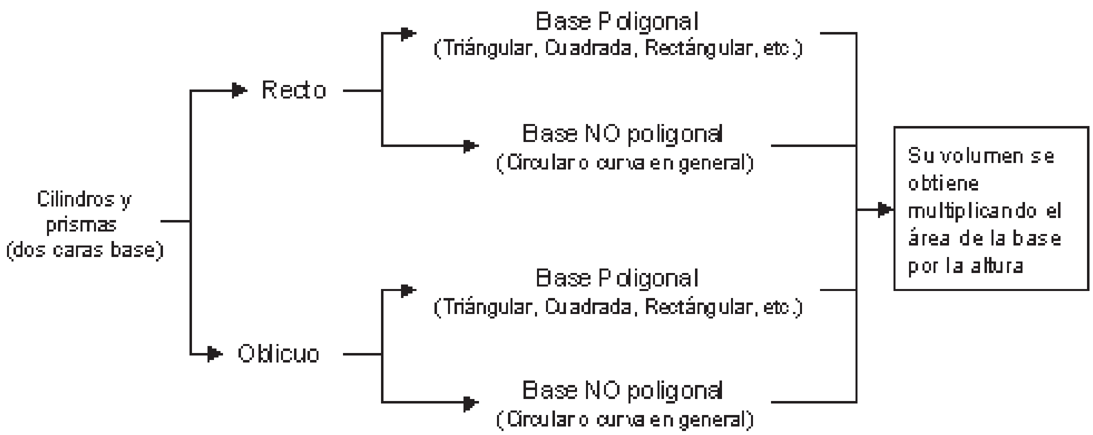
$A_{\text{total cilindro}} = 2 * \pi * R * (h + R)$

Mientras que el **volumen** de un cilindro se calcula a partir de la expresión:

$V_{\text{cilindro}} = A_{\text{base}} \times \text{altura}$

Es decir, $V = \pi * R^2 \cdot h$

Podemos resumir el cálculo del volumen de prismas o paralelepípedos y cilindros en el siguiente esquema:



5.3. Pirámides

Una pirámide es un poliedro que tiene como base un polígono y cuyas caras laterales son triángulos con un vértice común.

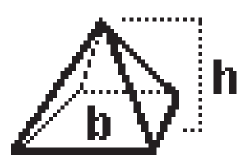
El **área** de la **superficie** de una pirámide es la suma de las superficies de todas sus caras, fórmula es:

$$A_{pirámide} = (\text{Área de cara lateral} \times \text{número de caras laterales}) + (\text{área de la base})$$

Ahora, el **volumen** de una **pirámide** es:

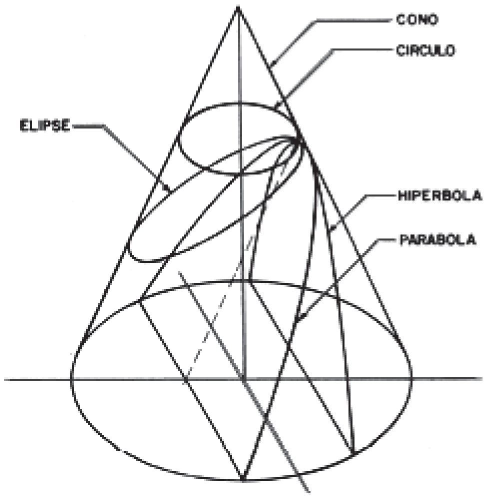
$$V_{pirámide} = \text{Área}_{\text{de la base}} \times \text{Altura} / 3$$

$$V_{pirámide} = (1/3)*b * h$$



5.4. Conos

Un cono es la figura geométrica que se obtiene al hacer girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos.



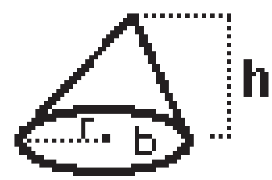
El **área** de la **superficie** del **cono** será la de su área lateral que es un sector circular cuyo radio es la generatriz sumado al área del círculo de la base. Como la circunferencia completa tiene una longitud 2 π r, entonces el sector circular tiene una esa longitud 2 π r. Entonces podemos establecer la siguiente relación entre ambos:

$$\frac{\text{longitud de la circunferencia}}{\text{superficie del circulo}} = \frac{\text{longitud del arco}}{\text{superficie del sector}}$$

De esta forma el **volumen** de un cono se calcula a partir de la expresión:

$$V_{\text{cono}} = A_{\text{de la base}} \times \text{altura} / 3$$

$$V_{\text{Cono base circular}} = (1/3) * b * h = (1/3)\, \pi * r^2 * h$$



Podemos resumir el cálculo del volumen de pirámides y conos en el siguiente esquema:

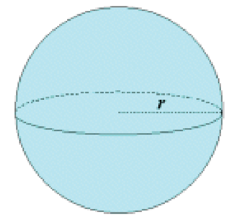
- Conos y pirámides (un cara plana)
  - Recto
    - Base Poligonal (Triángular, Cuadrada, Rectángular, etc.)
    - Base NO poligonal (Circular o curva en general)
  - Oblicuo
    - Base Poligonal (Triángular, Cuadrada, Rectángular, etc.)
    - Base NO poligonal (Circular o curva en general)

→ Su volumen es equivalente a un tercio del volumen de un cilindro de la misma base y misma altura, es decir, 1/3 por el área de la base y por la altura.

◊ A ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊

π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π

5.5. Esfera



La esfera es la figura geométrica que se obtiene al hacer girar un semicírculo alrededor de un diámetro.

El **área** de la esfera se calcula a partir de la expresión:

$$A_{esfera} = 4 * \pi * r^2$$

Finalmente, el **volumen** de la esfera se calcula a partir de la expresión:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

Ejemplo

Tomando los datos del círculo anterior, determine el volumen la esfera de 30 cm de diámetro.

Solución

- Datos: **π = 3,141592; D = 30 cm**, como el r = D / 2, entonces **r = 15 cm.**
- El volumen de la esfera es: **$V_{esfera} = 4/3 * \pi * r^3$** y sustituyendo valores se tiene que:

$$V_{esfera} = 4/3 * \pi * r^3 = 4/3 * \pi * (15cm)^3 = (4 * 3,141592 * 3375\ cm^3)/3$$

$$V_{esfera} = 14137,17cm^3$$ ✓

Actividad de Control:

Resuélvelos todos!!, son cortos y fácil de analizar.

- Calcula el volumen, en centímetros cúbicos, de una habitación que tiene 5 m de largo, 40 dm de ancho y 2500 mm de alto.

- Una piscina tiene 8 m de largo, 6 m de ancho y 1.5 m de profundidad. Se pinta la piscina a razón de 6 BsF el metro cuadrado. ¿Cuánto costará pintarla? . ¿Cuántos litros de agua serán necesarios para llenarla?

- En un almacén de dimensiones 5 m de largo, 3 m de ancho y 2 m de alto queremos almacenar cajas de dimensiones 10 dm de largo, 6 dm de ancho y 4 dm de alto. ¿Cuantas cajas podremos almacenar?

- Calcula la altura de un prisma que tiene como área de la base 12 dm^2 y 48 l de capacidad.

◊ A ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊ α ◊
π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π Δ π

- Calcula la cantidad de hojalata que se necesitará para hacer 10 botes de forma cilíndrica de 10 cm de diámetro y 20 cm de altura.

- Un cilindro tiene por altura la misma longitud que la circunferencia de la base. Y la altura mide 125.66 cm. Calcular: El área total y su volumen.

- La cúpula de una catedral tiene forma semiesférica, de diámetro 50 m. Si restaurarla tiene un coste de 300 BsF el m^2, ¿A cuánto ascenderá el presupuesto de la restauración?

- ¿Cuántas losetas cuadradas de 20 cm de lado se necesitan para recubrir las caras de una piscina de 10 m de largo por 6 m de ancho y de 3 m de profundidad?

- Un recipiente cilíndrico de 5 cm de radio y y 10 cm de altura se llena de agua. Si la masa del recipiente lleno es de 2 kg, ¿cuál es la masa del recipiente vacío?

- Para una fiesta, Luís ha hecho 10 gorros de forma cónica con cartón. ¿Cuánto cartón habrá utilizado si las dimensiones del gorro son 15 cm de radio y 25 cm de generatriz?

- Un cubo de 20 cm de arista está lleno de agua. ¿Cabría esta agua en una esfera de 20 cm de radio?

Actividad de Control:

En la figura, encuentra diez (10) cuadrados.