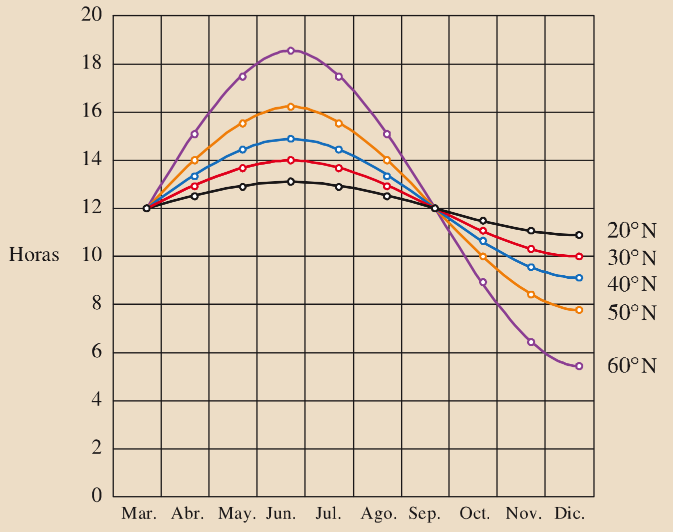
I

FUNCIONES Y MODELOS



Con frecuencia una representación gráfica de una función, en este caso la cantidad de horas con luz del Sol en función de la época del año en varias latitudes, es la manera más natural y conveniente de ilustrar la función.

El propósito fundamental del cálculo son las funciones. En este capítulo se prepara el camino para el cálculo al analizar las ideas básicas referentes a las funciones, sus gráficas y las maneras para transformarlas y combinarlas. Se hará hincapié en que una función se puede representar de diferentes modos: mediante una ecuación, en una tabla, con una gráfica o con palabras. Se considerarán los tipos principales de funciones que se presentan en el cálculo y se describirá el proceso de usarlas como modelos matemáticos de fenómenos del mundo real. También se expondrá el uso de las calculadoras graficadoras y del software para trazar gráficas.

1.1 CUATRO MANERAS DE REPRESENTAR UNA FUNCIÓN

Las funciones surgen siempre que una cantidad depende de otra. Considere las cuatro situaciones siguientes:

A. El área A de un círculo depende del radio r del mismo. La regla que relaciona r con A se expresa mediante la ecuación $A = \pi r^2$. Con cada número positivo r existe asociado un valor de A, por lo que A es *función* de r.

Año	Población (en millones)
1900	1650
1910	1750
1920	1860
1930	2070
1940	2300
1950	2560
1960	3040
1970	3710
1980	4450
1990	5280
2000	6080

B. La población humana del mundo, P, depende del tiempo t. En la tabla se dan estimaciones de la población del mundo, $P(t)$, en el tiempo t, para ciertos años. Por ejemplo,

$$P(1950) \approx 2\,560\,000\,000$$

Pero para cada valor de tiempo t existe un valor de P correspondiente, por lo que P es una función de t.

C. El costo C de enviar por correo una carta de primera clase depende de su peso w. Aun cuando no existe una fórmula sencilla que relacione w con C, la oficina de correos tiene una regla parta determinar C cuando se conoce w.

D. La aceleración vertical a del suelo, según la mide un sismógrafo durante un terremoto, es una función del tiempo transcurrido t. En la figura 1 se muestra una gráfica generada por la actividad sísmica durante el terremoto de Northridge que sacudió Los Ángeles en 1994. Para un valor dado de t, la gráfica proporciona un valor correspondiente de a.

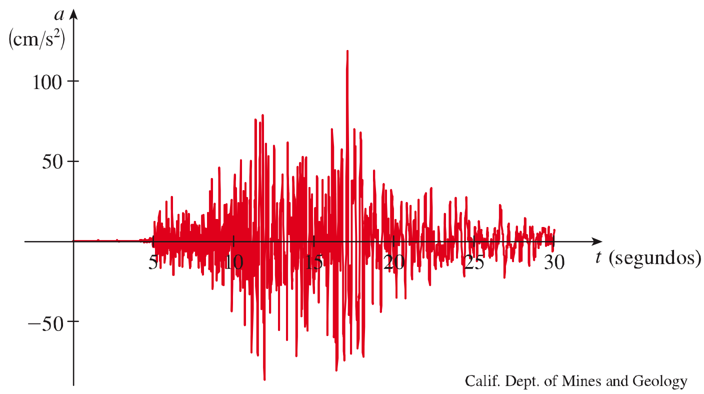


FIGURA 1
Aceleración vertical del suelo durante el terremoto de Northridge

En cada uno de estos ejemplos se describe una regla por la cual, dado un número (r, t, w o t), se asigna otro número (A, P, C o a). En cada caso, el segundo número es función del primero.

> Una **función** f es una regla que asigna a cada elemento x de un conjunto D exactamente un elemento, llamado $f(x)$, de un conjunto E.

Por lo común, se consideran funciones para las cuales los conjuntos D y E son conjuntos de números reales. El conjunto D se llama **dominio** de la función. El número $f(x)$ es el **valor de f en x** y se lee "f de x". El **intervalo** de f es el conjunto de todos los valores posibles de $f(x)$, conforme x varía en todo el dominio. Un símbolo que representa un número arbitrario en el *dominio* de una función f se llama **variable independiente**. Un símbolo que representa un número en el *intervalo* de f se llama **variable dependiente**. En el ejemplo A, r es la variable independiente y A es la dependiente.

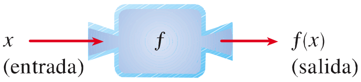


FIGURA 2
Diagrama de una máquina para una función f

Resulta útil concebir una función como una **máquina** (véase la figura 2). Si x está en el dominio de la función f, por lo tanto cuando x entra en la máquina, se acepta como una entrada y la máquina produce una salida $f(x)$ de acuerdo con la regla de la función. De este modo, puede concebir el dominio como el conjunto de todas las entradas posibles y el intervalo como el conjunto de todas las salidas posibles.

Las funciones preprogramadas de una calculadora son buenos ejemplos de una función como una máquina. Por ejemplo, la tecla de raíz cuadrada en su calculadora calcula una de esas funciones. Usted oprime la tecla marcada como $\sqrt{\ }$ o $\sqrt{x}$ y registra la entrada x. Si $x < 0$, en tal caso x no está en el dominio de esta función; es decir, x no es una entrada aceptable y la calculadora indicará un error. Si $x \geqslant 0$, en tal caso aparecerá una *aproximación* a $\sqrt{x}$ en la pantalla. Así, la tecla $\sqrt{x}$ de su calculadora no es exactamente lo mismo que la función matemática exacta f definida por $f(x) = \sqrt{x}$.

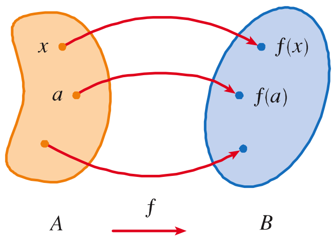


FIGURA 3
Diagrama de flechas para f

Otra manera de representar una función es un **diagrama de flechas** como en la figura 3. Cada flecha une un elemento de D con un elemento de E. La flecha indica que $f(x)$ está asociada con x, $f(a)$ con a, y así sucesivamente.

El método más común para visualizar una función es su gráfica. Si f es una función con dominio D, después su **gráfica** es el conjunto de las parejas ordenadas

$$\{(x, f(x)) \mid x \in D\}$$

(Observe que son parejas entrada-salida.) En otras palabras, la gráfica de f consta de todos los puntos (x, y) en el plano coordenado, tales que $y = f(x)$ y x está en el dominio de f.

La gráfica de una función f da una imagen útil del comportamiento, o la "historia de la vida", de una función. Como la coordenada y de cualquier punto (x, y) de la gráfica es $y = f(x)$, es posible leer el valor de $f(x)$ a partir de la gráfica como la altura de esta última arriba del punto x (véase la figura 4). La gráfica de f también permite tener una imagen del dominio de f sobre el eje x y su intervalo en el eje y como en la figura 5.

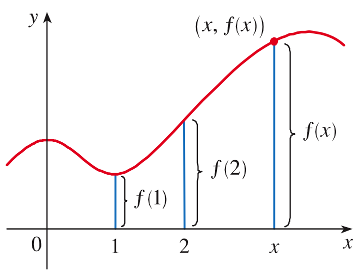


FIGURA 4

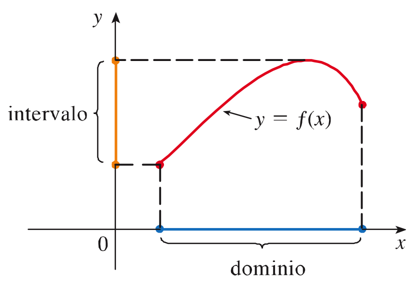


FIGURA 5

EJEMPLO 1 En la figura 6 se muestra la gráfica de una función f.

(a) Encuentre los valores de $f(1)$ y $f(5)$.

(b) ¿Cuáles son el dominio y el intervalo de f?

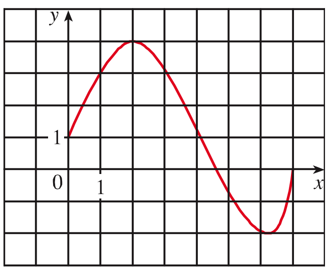


FIGURA 6

SOLUCIÓN

(a) En la figura 6 se ve que el punto $(1, 3)$ se encuentra sobre la gráfica de f, de modo que el valor de f en 1 es $f(1) = 3$. (En otras palabras, el punto de la gráfica que se encuentra arriba de $x = 1$ está tres unidades arriba del eje x.)

Cuando $x = 5$, la gráfica se encuentra alrededor de 0.7 unidades debajo del eje x, por tanto, $f(5) \approx -0.7$

(b) $f(x)$ está definida cuando $0 \leqslant x \leqslant 7$, de modo que el dominio de f es el intervalo cerrado $[0, 7]$. Observe que f toma todos los valores desde -2 hasta 4, de manera que el intervalo de f es

■ La notación para intervalos aparece en el apéndice A.

$$\{y \mid -2 \leqslant y \leqslant 4\} = [-2, 4]$$ □

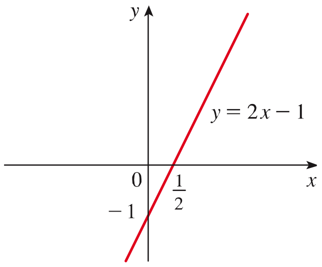


FIGURA 7

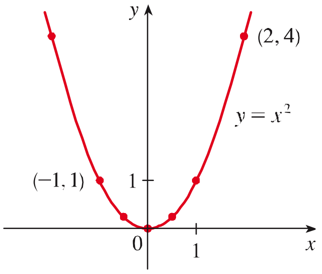


FIGURA 8

EJEMPLO 2 Trace una gráfica y encuentre el dominio y el intervalo de cada función.
(a) $f(x) = 2x - 1$ (b) $g(x) = x^2$

SOLUCIÓN

(a) La ecuación de la gráfica es $y = 2x - 1$ y esto se reconoce como la ecuación de una línea con pendiente 2 y ordenada al origen -1. (Recuerde la forma de pendiente-ordenada al origen de la ecuación de una recta: $y = mx + b$. Véase apéndice B.) Esto permite trazar la gráfica de f de la figura 7. La expresión $2x - 1$ está definida para todos los números reales, de modo que el dominio de f es el conjunto de todos los números reales, el cual se denota con $\mathbb{R}$. En la gráfica se muestra que el intervalo también es $\mathbb{R}$.

(b) Como $g(2) = 2^2 = 4$ y $g(-1) = (-1)^2 = 1$, podría dibujar los puntos $(2, 4)$ y $(-1, 1)$ junto con unos cuantos puntos más de la gráfica y unirlos para producir la gráfica (figura 8). La ecuación de la gráfica es $y = x^2$, lo cual representa una parábola (véase el apéndice C). El dominio de g es $\mathbb{R}$. El intervalo de g consta de todos los valores de $g(x)$; es decir, todos los números de la forma x^2. Pero $x^2 \geqslant 0$ para todos los números x y cualquier número positivo y es un cuadrado. De este modo, el intervalo de g es $\{y \mid y \geqslant 0\} = [0, \infty)$. Esto también se ve en la figura 8. □

EJEMPLO 3 Si $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$ y $h \neq 0$, evaluar $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

SOLUCIÓN Primero evalúe $f(a + h)$ sustituyendo x mediante $a + h$ en la expresión para $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(a+h) &= 2(a+h)^2 - 5(a+h) + 1 \\ &= 2(a^2 + 2ah + h^2) - 5(a+h) + 1 \\ &= 2(a^2 + 2ah + h^2) - 5a - h + 1 \end{aligned}$$

Por lo tanto al sustituir en la expresión que se proporciona y simplificando:

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{(2a^2 + 4ah + 2h^2 - 5a - 5h + 1) - (2a^2 - 5a - 1)}{h} \\ &= \frac{2a^2 + 4ah + 2h^2 - 5a - 5h + 1 - 2a^2 + 5a - 1}{h} \\ &= \frac{4ah + 2h^2 - 5h}{h} = 4a + 2h - 5 \end{aligned}$$ □

■ La expresión

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

en el ejemplo 3 se le denomina un **cociente de diferencia** y habitualmente sucede en cálculo. Como verá en el capítulo 2, representa la relación de cambio promedio $f(x)$ entre $x = a$ y $x = a + h$

REPRESENTACIÓN DE LAS FUNCIONES

Se tienen cuatro maneras posibles para representar una función:

- Verbalmente (mediante una descripción en palabras)
- Numéricamente (con una tabla de valores)
- Visualmente (mediante una gráfica)
- Algebraicamente (por medio de una fórmula explícita)

Si una sola función se puede representar de las cuatro maneras, con frecuencia resulta útil pasar de una representación a otra, para adquirir un conocimiento adicional de esa función. (Por ejemplo, en el ejemplo 2 se empieza con fórmulas algebraicas y, a continuación, se obtuvieron las gráficas.) Pero ciertas funciones se describen de manera más natural con uno de los métodos que con otro. Con esto en mente, analice de nuevo las cuatro situaciones consideradas al principio de esta sección.

A. Quizá la representación más útil del área de un círculo como función de su radio sea la fórmula algebraica $A(r) = \pi r^2$, aunque es posible compilar una tabla de valores o trazar una gráfica (la mitad de una parábola). Como un círculo debe tener un radio positivo, el dominio es $\{r \mid r > 0\} = (0, \infty)$, y el intervalo también es $(0, \infty)$.

Año	Población (en millones)
1900	1650
1910	1750
1920	1860
1930	2070
1940	2300
1950	2560
1960	3040
1970	3710
1980	4450
1990	5280
2000	6080

B. Se ha descrito verbalmente la función: $P(t)$ es la población humana del mundo en el tiempo t. La tabla de valores de la población mundial da una representación conveniente de esta función. Si coloca estos valores en una gráfica, obtendrá la gráfica (llamada *gráfica de dispersión*) de la figura 9. También es una representación útil; pues nos permite absorber todos los datos a la vez. ¿Qué hay acerca de una fórmula? Por supuesto, es imposible idear una fórmula explícita que dé la población humana exacta $P(t)$ en cualquier tiempo t. Pero es posible hallar una expresión para una función que proporcione una *aproximación de* $P(t)$. De hecho, con la aplicación de los métodos que se explican en la sección 1.2, se obtiene la aproximación

$$P(t) \approx f(t) = (0.008079266) \cdot (1.013731)^t$$

y en la figura 10 se ilustra que es un "ajuste" razonablemente bueno. La función f se llama *modelo matemático* para el crecimiento de la población. En otras palabras, es una función con una fórmula explícita que da una aproximación para el comportamiento de la función dada. Sin embargo, verá que las ideas del cálculo se pueden aplicar a una tabla de valores; no se necesita una fórmula explícita.

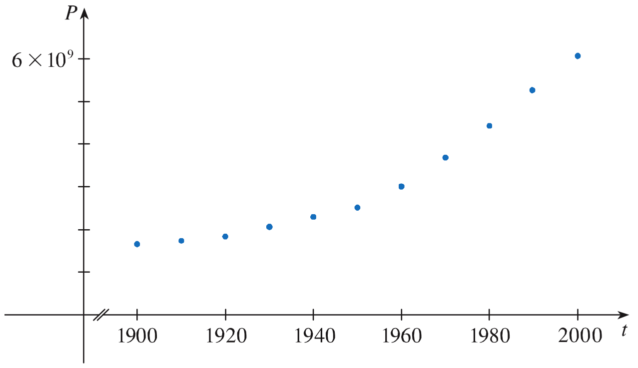


FIGURA 9

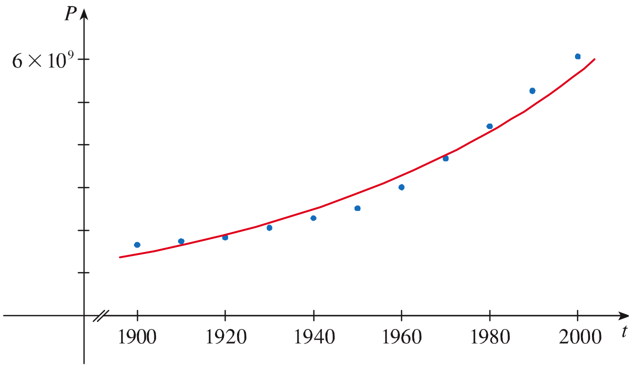


FIGURA 10

■ Una función definida por una tabla de valores se conoce como *función tabular.*

La función P es típica entre las funciones que surgen siempre que intenta aplicar el cálculo al mundo real. Empieza con una descripción verbal de la función. En seguida, es posible que sea capaz de construir una tabla de valores de la función, quizá a partir de lecturas de instrumentos en un experimento científico. Aun cuando no tenga el conocimiento completo de los valores de la función, a lo largo del libro verá que todavía es posible realizar las operaciones del cálculo en una función de ese tipo.

w (onzas)	$C(w)$ (dólares)
$0 < w \leqslant 1$	0.39
$1 < w \leqslant 2$	0.63
$2 < w \leqslant 3$	0.87
$3 < w \leqslant 4$	1.11
$4 < w \leqslant 5$	1.35
⋮	⋮
$12 < w \leqslant 13$	3.27

C. Una vez más, la función está descrita en palabras: $C(w)$ es el costo de enviar por correo una carta de primera clase con peso w. La regla que en 1996 aplicaba el U.S. Postal Service (Servicio Postal de Estados Unidos) es la siguiente: el costo es de 39 centavos de dólar hasta por una onza, más 24 centavos por cada onza sucesiva, hasta 13 onzas. La tabla de valores que se muestra en el margen es la representación más conveniente para esta función, aunque es posible trazar una gráfica (véase el ejemplo 10).

D. La gráfica que se muestra en la figura 1 es la representación más natural de la función aceleración vertical $a(t)$. Es cierto que se podría compilar una tabla de valores e incluso es posible idear una fórmula aproximada. Pero todo lo que necesita saber un geólogo, amplitudes y patrones, puede observarse con facilidad a partir de la gráfica. (Lo mismo se cumple para los patrones que se ven en los electrocardiogramas de los pacientes cardiacos y en los polígrafos para la detección de mentiras.)

En el ejemplo siguiente, se grafica una función definida verbalmente.

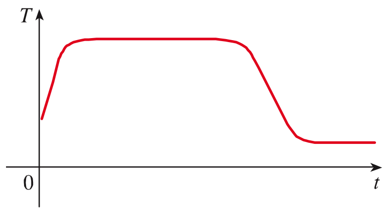


FIGURA 11

EJEMPLO 4 Cuando abre un grifo de agua caliente, la temperatura T del agua depende de cuánto tiempo ha estado corriendo. Trace una gráfica aproximada de T como función del tiempo t que ha transcurrido desde que se abrió el grifo.

SOLUCIÓN La temperatura inicial del agua corriente está cercana a la ambiente, debido al agua que ha estado en los tubos. Cuando empieza a salir la que se encuentra en el tanque de agua caliente, T aumenta con rapidez. En la fase siguiente, T es constante a la temperatura del agua calentada del tanque. Cuando éste se drena, T decrece hasta la temperatura de la fuente de agua. Esto permite realizar el boceto de gráfica de T como una función de t en la figura 11. □

El ejemplo que sigue, parte de una descripción verbal de una función, en una situación física, y se obtiene una fórmula algebraica explícita. La capacidad para llevar a cabo esto constituye una habilidad útil en los problemas de cálculo en los que se piden los valores máximo y mínimo de cantidades.

V EJEMPLO 5 Un recipiente rectangular para almacenamiento, con su parte superior abierta, tiene un volumen de 10 m^3. La longitud de su base es el doble de su ancho. El material para la base cuesta 10 dólares por metro cuadrado y el material para los lados, cuesta 6 dólares por metro cuadrado. Exprese el costo del material como función del ancho de la base.

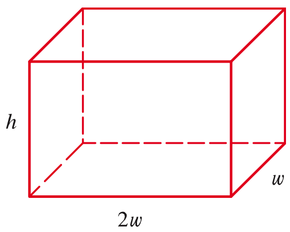


FIGURA 12

SOLUCIÓN Dibuje un diagrama como el de la figura 12 e introduzca la notación tomando w y $2w$ como el ancho y la longitud de la base, respectivamente, y h como la altura.

El área de la base es $(2w)w = 2w^2$, de modo que el costo, en dólares, del material para la base es $10(2w^2)$. Dos de los lados tienen el área wh y el área de los otros dos es $2wh$, así el costo del material para los lados es $6[2(wh) + 2(2wh)]$. En consecuencia el costo total es

$$C = 10(2w^2) + 6[2(wh) + 2(2wh)] = 20w^2 + 36wh$$

Para expresar C como función sólo de w, necesita eliminar h, lo que sucede al aplicar el hecho de que el volumen es 10 m^3. De este modo,

$$w(2w)h = 10$$

lo cual da
$$h = \frac{10}{2w^2} = \frac{5}{w^2}$$

Si se sustituye esto en la expresión para C

$$C = 20w^2 + 36w\left(\frac{5}{w^2}\right) = 20w^2 + \frac{180}{w}$$

Por lo tanto, la ecuación

$$C(w) = 20w^2 + \frac{180}{w} \qquad w > 0$$

expresa C como función de w. □

■ Al establecer funciones de aplicación, como en el ejemplo 5, puede resultar útil repasar los principios para la resolución de problemas como se plantean en la página 76, en particular el paso 1: *comprender el problema*.

EJEMPLO 6 Encuentre el dominio de cada función.

(a) $f(x) = \sqrt{x + 2}$ (b) $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - x}$

■ Si se da una función mediante una fórmula y no se da el dominio explícitamente, la convención es que el dominio es el conjunto de todos los números para los que la fórmula tiene sentido y define un número real.

SOLUCIÓN

(a) Ya que la raíz cuadrada de un número negativo no está definida (como número real), el dominio de f consta de todos los valores de x tales que $x + 2 \geqslant 0$. Esto es equivalente a $x \geqslant -2$, de modo que el dominio es el intervalo $[-2, \infty)$.

(b) Dado que

$$g(x) = \frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{x(x - 1)}$$

y la división entre 0 no está permitida, $g(x)$ no está definida cuando $x = 0$ o $x = 1$. Por lo tanto, el dominio de g es

$$\{x \mid x \neq 0, x \neq 1\}$$

lo cual también podría escribirse, con la notación de intervalos, como

$$(-\infty, 0) \cup (0, 1) \cup (1, \infty)$$ □

La gráfica de una función es una curva en el plano xy. Pero surge la cuestión: ¿cuáles curvas en el plano xy son gráficas de funciones? La siguiente prueba responde lo anterior.

PRUEBA DE LA LÍNEA VERTICAL Una curva en el plano xy es la gráfica de una función de x si y sólo si ninguna línea vertical se interseca con la curva más de una vez.

En la figura 13 se puede ver la razón de la veracidad de la prueba de la línea vertical. Si cada línea vertical $x = a$ interseca una curva sólo una vez, en (a, b), por lo tanto se define exactamente un valor funcional mediante $f(a) = b$. Pero si una línea $x = a$ se interseca con la curva dos veces, en (a, b) y (a, c), en tal caso la curva no puede representar una función, porque una función no puede asignar dos valores diferentes a a.

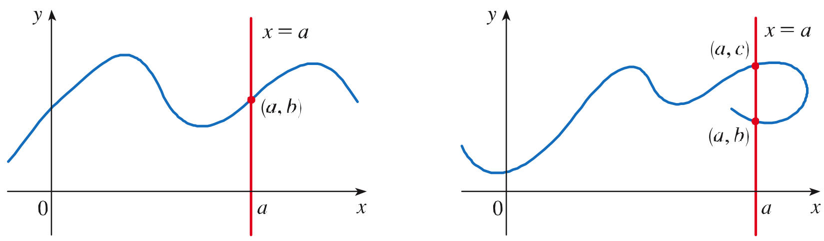


FIGURA 13

Por ejemplo, la parábola $x = y^2 - 2$ que aparece en la figura 14(a) en la página que sigue no es la gráfica de una función de x porque, como el lector puede ver, existen líneas verticales que intersecan dos veces esa parábola. Sin embargo, la parábola en realidad contiene las gráficas de *dos* funciones de x. Observe que $x = y^2 - 2$ significa $y^2 = x + 2$, por lo que $y = \pm\sqrt{x + 2}$. Por esto, las mitades superior e inferior de la parábola son las gráficas de las funciones $f(x) = \sqrt{x + 2}$ [del ejemplo 6(a)] y $g(x) = -\sqrt{x + 2}$ [véase las figuras 14(b) y (c)]. Observe que, si invierte los papeles de x y y, en tal caso la ecuación $x = h(y) = y^2 - 2$ define x como función de y (con y como la variable independiente y x como dependiente) y la parábola aparece ahora como la gráfica de la función h.

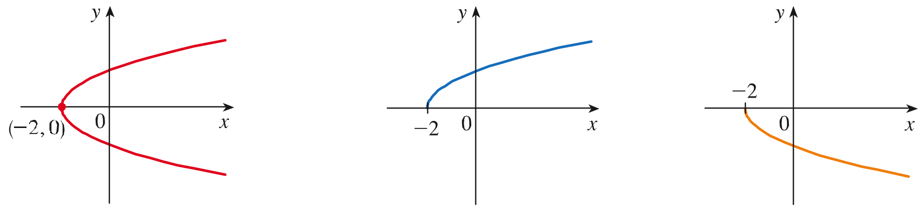


FIGURA 14 (a) $x = y^2 - 2$ (b) $y = \sqrt{x+2}$ (c) $y = -\sqrt{x+2}$

FUNCIONES SECCIONALMENTE DEFINIDAS

Las funciones de los cuatro ejemplos siguientes están definidas por fórmulas diferentes en diferentes partes de sus dominios.

V EJEMPLO 7 Una función f se define por

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \leqslant 1 \\ x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Evalúe $f(0)$, $f(1)$ y $f(2)$ y trace la gráfica.

SOLUCIÓN Recuerde que una función es una regla. Para esta función en particular, la regla es: primero se considera el valor de la entrada x. Si sucede que $x \leqslant 1$, en tal caso el valor de $f(x)$ es $1 - x$. Por otra parte, si $x > 1$, después el valor de $f(x)$ es x^2.

Como $0 \leqslant 1$, tenemos $f(0) = 1 - 0 = 1$.

Como $1 \leqslant 1$, tenemos $f(1) = 1 - 1 = 0$.

Como $2 > 1$, tenemos $f(2) = 2^2 = 4$.

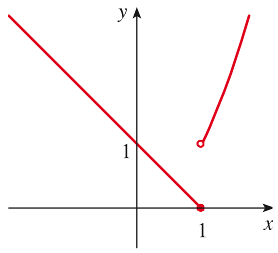


FIGURA 15

¿Cómo dibujar la gráfica de f? Observe que, si $x \leqslant 1$, por lo tanto $f(x) = 1 - x$ de modo que la parte de la gráfica de f que se encuentra a la izquierda de la línea vertical $x = 1$ debe coincidir con la línea $y = 1 - x$, la cual tiene la pendiente -1 y 1 como ordenada al origen. Si $x > 1$, después $f(x) = x^2$, por lo que la parte de la gráfica de f que está a la derecha de la línea $x = 1$ tiene que coincidir con la gráfica de $y = x^2$, la cual es una parábola. Esto permite trazar la gráfica de la figura 15. El punto relleno indica que el punto $(1, 0)$ está incluido en la gráfica; el punto hueco indica que el punto $(1, 1)$ está fuera de la gráfica. □

El ejemplo siguiente de una función seccionalmente definida es la función valor absoluto. Recuerde que el **valor absoluto** de un número a, denotado con $|a|$, es la distancia de a hasta 0, sobre la recta de los números reales. Las distancias siempre son positivas o 0; de tal manera

■ Para un repaso más extenso de los valores absolutos, véase el apéndice A.

$$|a| \geqslant 0 \qquad \text{para todo número } a$$

Por ejemplo,

$$|3| = 3 \qquad |-3| = 3 \qquad |0| = 0 \qquad |\sqrt{2} - 1| = \sqrt{2} - 1 \qquad |3 - \pi| = \pi - 3$$

En general,

$$\boxed{\begin{aligned} |a| &= a & \text{si } a \geqslant 0 \\ |a| &= -a & \text{si } a < 0 \end{aligned}}$$

(Recuerde que si a es negativo, entonces $-a$ es positivo.)

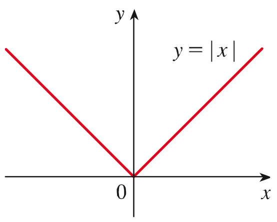


FIGURA 16

EJEMPLO 8 Trace la gráfica de la función valor absoluto, $f(x) = |x|$.

SOLUCIÓN Con base en el análisis precedente, sabe que

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Al aplicar el método del ejemplo 7, la gráfica de f coincide con la línea $y = x$, a la derecha del eje y, y coincide con la línea $y = -x$, a la izquierda del eje y (véase la figura 16). □

EJEMPLO 9 Encuentre una fórmula para la función f que se dibuja en la figura 17.

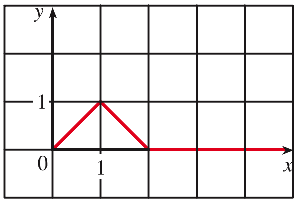


FIGURA 17

SOLUCIÓN La línea que pasa por $(0, 0)$ y $(1, 1)$ tiene pendiente $m = 1$ y su ordenada al origen es $b = 0$, de forma que su ecuación es $y = x$. Por esto, para la parte de la gráfica de f que une $(0, 0)$ con $(1, 1)$,

$$f(x) = x \qquad \text{si} \qquad 0 \leq x \leq 1$$

■ Forma punto-pendiente de la ecuación de una recta:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

véase el apéndice B.

La línea que pasa por $(1, 1)$ y $(2, 0)$ tiene pendiente $m = -1$, de suerte que su forma punto-pendiente es

$$y - 0 = (-1)(x - 2) \qquad \text{o} \qquad y = 2 - x$$

De tal manera que

$$f(x) = 2 - x \qquad \text{si} \qquad 1 < x \leq 2$$

Observe también que, para $x > 2$, la gráfica de f coincide con el eje x. Si reúne esta información, tiene la fórmula siguiente para f, en tres secciones:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$ □

EJEMPLO 10 En el ejemplo C del principio de esta sección, se consideró el costo $C(w)$ de enviar por correo una carta de primera clase con peso w. En realidad, ésta es una función seccionalmente definida porque, a partir de la tabla de valores, se tiene

$$C(w) = \begin{cases} 0.39 & \text{si } 0 < w \leq 1 \\ 0.63 & \text{si } 1 < w \leq 2 \\ 0.87 & \text{si } 2 < w \leq 3 \\ 1.11 & \text{si } 3 < w \leq 4 \\ \vdots \end{cases}$$

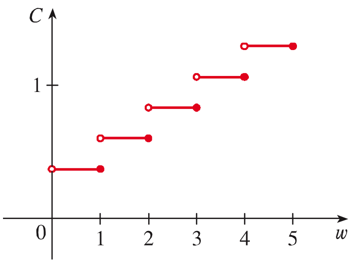


FIGURA 18

La gráfica se muestra en la figura 18. Usted puede ver por qué a las funciones semejantes a ésta se les llama **función escalón**: saltan de un valor al siguiente. En el capítulo 2 se estudiarán esas funciones. □

SIMETRÍA

Si una función f satisface $f(-x) = f(x)$, para todo número x en su dominio, en tal caso f se denomina **función par**. Por ejemplo, la función $f(x) = x^2$ es par porque

$$f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$$

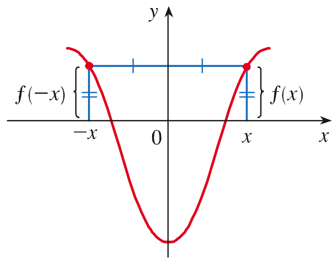


FIGURA 19
Una función par

El significado geométrico de una función par es que su gráfica es simétrica con respecto al eje y (véase la figura 19). Esto significa que si traza la gráfica de f para $x \geq 0$, obtiene toda la gráfica con sólo reflejar esta porción con respecto al eje y.

Si f satisface $f(-x) = -f(x)$, para todo número x en su dominio, en seguida f se conoce como **función impar**. Por ejemplo, la función $f(x) = x^3$ es impar porque

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

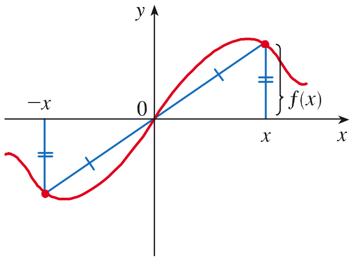


FIGURA 20
Una función impar

La gráfica de una función impar es simétrica respecto al origen (véase la figura 20). Si ya tiene la gráfica de f para $x \geq 0$, puede obtener la gráfica entera al hacerla girar 180° alrededor del origen.

V EJEMPLO 11 Determine si cada una de las funciones siguientes es par, impar o ninguna de las dos.

(a) $f(x) = x^5 + x$ (b) $g(x) = 1 - x^4$ (c) $h(x) = 2x - x^2$

SOLUCIÓN

(a)
$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^5 + (-x) = (-1)^5 x^5 + (-x) \\ &= -x^5 - x = -(x^5 + x) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

En consecuencia, f es una función impar.

(b)
$$g(-x) = 1 - (-x)^4 = 1 - x^4 = g(x)$$

De modo que g es par.

(c)
$$h(-x) = 2(-x) - (-x)^2 = -2x - x^2$$

Dado que $h(-x) \neq h(x)$ y $h(-x) \neq -h(x)$, se concluye que h no es par ni impar. □

En la figura 21 se muestran las gráficas de las funciones del ejemplo 11. Observe que la gráfica de h no es simétrica respecto al eje y ni respecto al origen.

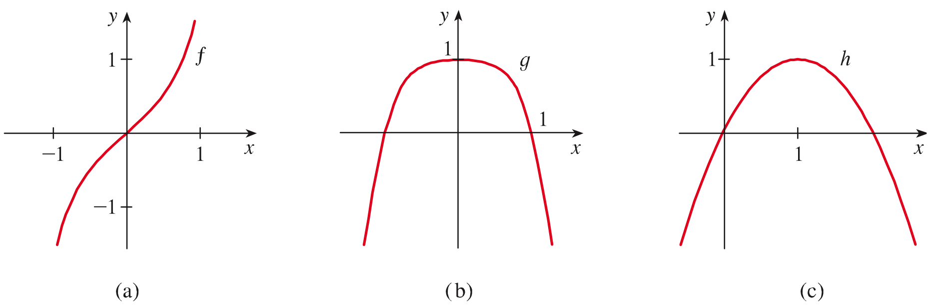


FIGURA 21

FUNCIONES CRECIENTES Y DECRECIENTES

La gráfica que se muestra en la figura 22 sube desde A hasta B, desciende desde B hasta C, y vuelve a subir desde C hasta D. Se dice que la función f está creciendo sobre el intervalo $[a, b]$, decreciendo sobre $[b, c]$, y creciendo de nuevo sobre $[c, d]$. Observe que si x_1 y x_2 son dos números cualesquiera entre a y b, con $x_1 < x_2$, entonces $f(x_1) < f(x_2)$. Use esto como la propiedad que define una función creciente.

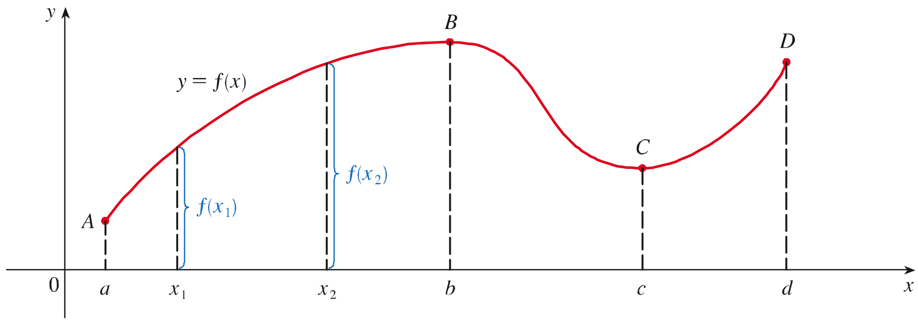


FIGURA 22

Se dice que una función f es **creciente** sobre un intervalo I si

$$f(x_1) < f(x_2) \qquad \text{siempre que } x_1 < x_2 \text{ en } I$$

Se dice que es **decreciente** sobre I si

$$f(x_1) > f(x_2) \qquad \text{siempre que } x_1 < x_2 \text{ en } I$$

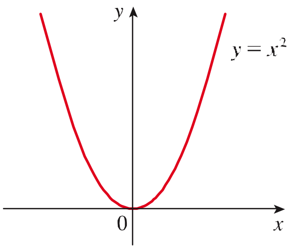


FIGURA 23

En la definición de función creciente es importante darse cuenta que se debe satisfacer la desigualdad $f(x_1) < f(x_2)$ para *toda* pareja de números x_1 y x_2 en I con $x_1 < x_2$.

A partir de la figura 23 es posible observar que la función $f(x) = x^2$ es decreciente sobre el intervalo $(-\infty, 0]$ y creciente sobre el intervalo $[0, \infty)$.

1.1 EJERCICIOS

1. Se da la gráfica de una función f.

(a) Establezca el valor de $f(-1)$.

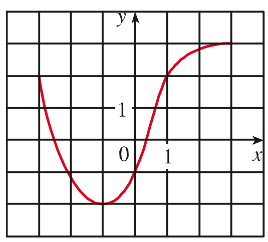
(b) Estime el valor de $f(2)$.

(c) ¿Para cuáles valores de x se tiene $f(x) = 2$?

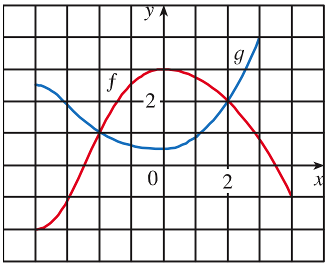
(d) Estime los valores de x tales que $f(x) = 0$.

(e) Establezca el dominio y el intervalo de f.

(f) ¿En qué intervalo es f creciente?



2. Se proporcionan las gráficas de f y g.
(a) Dé los valores de $f(-4)$ y $g(3)$.
(b) ¿Para cuáles valores de x se tiene $f(x) = g(x)$?
(c) Estime la solución de la ecuación $f(x) = -1$.
(d) ¿En qué intervalo f es decreciente?
(e) Dé el dominio y el intervalo de f.
(f) Dé el dominio y el intervalo de g.

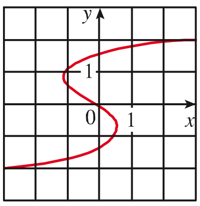


3. Un instrumento operado por el Departamento de Minas y Geología en el Hospital Universitario de la Universidad del Sur de California (USC) en Los Ángeles, registró la figura 1. Úsela para estimar el intervalo de la funcion aceleración vertical del suelo, en la USC durante el terremoto de Northridge.

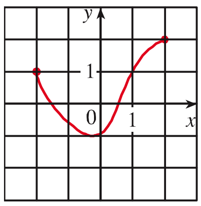
4. En esta sección se analizaron ejemplos de funciones, cotidianas: la población es una función del tiempo, el costo del porte de correos es una función del peso, la temperatura del agua es una función del tiempo. Dé otros tres ejemplos de funciones de la vida cotidiana que se describan verbalmente. ¿Qué puede decir acerca del dominio y del intervalo de cada una de sus funciones? Si es posible, trace una gráfica aproximada de cada función.

5–8 Determine si la curva es la gráfica de una función de x. Si lo es, dé el dominio y el intervalo de la función.

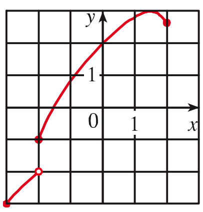
5.



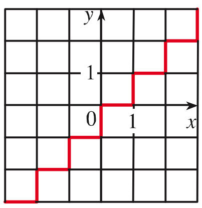
6.



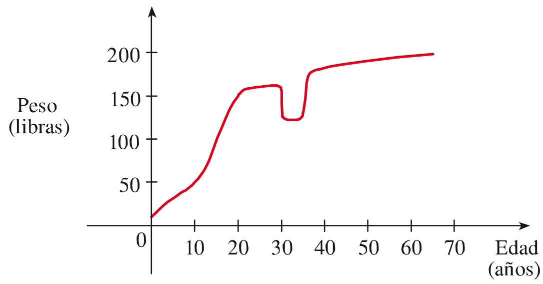
7.



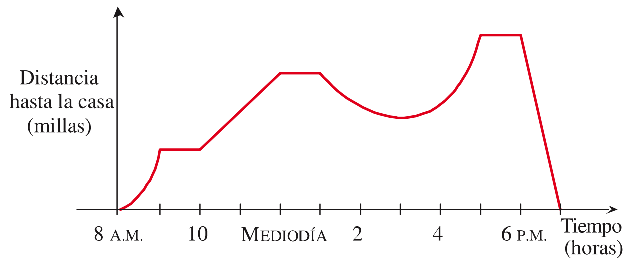
8.



9. La gráfica que se muestra da el peso de cierta persona como una función de la edad. Describa con palabras la manera en que varía el peso de esta persona a lo largo del tiempo. ¿Qué piensa el lector que sucedió cuando esta persona tenía 30 años?



10. La gráfica que se muestra da la distancia a la que se encuentra un vendedor de su casa como función del tiempo en cierto día. Describa con palabras lo que la gráfica indica con respecto al recorrido del vendedor en este día.



11. Usted pone algunos cubos de hielo en un vaso, lo llena con agua fría y lo deja sobre una mesa. Describa cómo cambia la temperatura del agua a medida que pasa el tiempo. Después, trace una gráfica aproximada de la temperatura del agua como función del tiempo transcurrido.

12. Trace una gráfica aproximada del número de horas de luz del día como función de la época del año.

13. Trace una gráfica aproximada de la temperatura exterior como función del tiempo durante un día típico de primavera.

14. Dibuje una gráfica aproximada del valor en el mercado, por un periodo de 20 años de un automóvil nuevo. Considere que se le da buen mantenimiento.

15. Dibuje la gráfica de la cantidad de una marca particular de café vendida por una tienda como una función del precio del café.

16. Usted coloca un pastel congelado en un horno y lo hornea durante una hora. Luego, lo saca y lo deja enfriar, antes de comerlo. Describa cómo cambia la temperatura del pastel conforme pasa el tiempo. Después, trace una gráfica aproximada de la temperatura del pastel como función del tiempo.

17. El propietario de una casa corta el césped cada miércoles por la tarde. Trace una gráfica aproximada de la altura del césped como función del tiempo durante un periodo de cuatro semanas.

18. Un avión sale de un aeropuerto y aterriza, una hora más tarde, en otro aeropuerto que se encuentra a 400 millas de distancia. Si t representa el tiempo en minutos desde que el avión ha dejado

la terminal, sea $x(t)$ la distancia horizontal recorrida y $y(t)$ la altitud del avión. Trace.
(a) Una gráfica posible de $x(t)$.
(b) Una gráfica posible de $y(t)$.
(c) Una gráfica posible de la rapidez con respecto al suelo.
(d) Una gráfica posible de la velocidad vertical.

19. En la tabla se exhibe el número N (en millones) de usuarios de telefonos celulares en el mundo. (Se proporcionan estimaciones semestrales).

t	1990	1992	1994	1996	1998	2000
N	11	26	60	160	340	650

(a) Mediante los datos trace una gráfica de N en función de t.
(b) Utilice la gráfica para estimar la cantidad de usuarios de teléfono celular a mediados de año en 1995 y 1999.

20. El 2 de junio de 2001 se tomaron lecturas de temperatura T (en °F) cada dos horas desde la medianoche hasta las 2:00 P.M. El tiempo t se midió en horas a partir de la medianoche.

t	0	2	4	6	8	10	12	14
T	73	73	70	69	72	81	88	91

(a) Utilice las lecturas para trazar una gráfica aproximada de T como una función de t.
(b) Utilice la gráfica que trazó para estimar la temperatura a las 11:00 A.M.

21. Si $f(x) = 3x^2 - x + 2$, encuentre $f(2)$, $f(-2)$, $f(a)$, $f(-a)$, $f(a+1)$, $2f(a)$, $f(2a)$, $f(a^2)$, $[f(a)]^2$ y $f(a+h)$.

22. Un globo esférico con radio de r pulgadas tiene el volumen $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Encuentre una función que represente la cantidad de aire que se requiere para inflarlo desde un radio de r pulgadas hasta otro de $r + 1$ pulgadas.

23–26 Valorar el cociente de diferencia para la función que se proporciona. Simplifique su respuesta.

23. $f(x) = 4 + 3x - x^2$, $\quad \dfrac{f(3+h) - f(3)}{h}$

24. $f(x) = x^3$, $\quad \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$

25. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $\quad \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$

26. $f(x) = \dfrac{x+3}{x+1}$, $\quad \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

27–31 Encuentre el dominio de la función.

27. $f(x) = \dfrac{x}{3x - 1}$

28. $f(x) = \dfrac{5x + 4}{x^2 + 3x + 2}$

29. $f(t) = \sqrt{t} + \sqrt[3]{t}$

30. $g(u) = \sqrt{u} + \sqrt{4 - u}$

31. $h(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^2 - 5x}}$

28. Encuentre el dominio, el intervalo y trace la gráfica de la función $h(x) = \sqrt{4 - x^2}$.

33–44 Encuentre el dominio y trace la gráfica de la función.

33. $f(x) = 5$

34. $F(x) = \frac{1}{2}(x + 3)$

35. $f(t) = t^2 - 6t$

36. $H(t) = \dfrac{4 - t^2}{2 - t}$

37. $g(x) = \sqrt{x - 5}$

38. $F(x) = |2x + 1|$

39. $G(x) = \dfrac{3x + |x|}{x}$

40. $g(x) = \dfrac{|x|}{x^2}$

41. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < 0 \\ 1 - x & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

42. $f(x) = \begin{cases} 3 - \frac{1}{2}x & \text{si } x \leqslant 2 \\ 2x - 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

43. $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x \leqslant -1 \\ x^2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$

44. $f(x) = \begin{cases} x + 9 & \text{si } x < -3 \\ -2x & \text{si } |x| \leqslant 3 \\ -6 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

45–50 Encuentre una expresión para la función cuya gráfica es la curva dada.

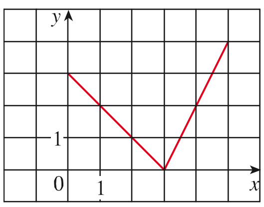
45. El segmento rectilíneo que une los puntos $(1, -3)$ y $(5, 7)$

46. El segmento rectilíneo que une los puntos $(-5, 10)$ y $(7, -10)$

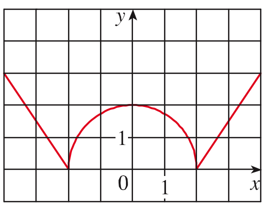
47. La mitad inferior de la parábola $x + (y - 1)^2 = 0$

48. La mitad superior del círculo $x^2 + (y - 2)^2 = 4$

49.



50.



51–55 Encuentre una fórmula para la función descrita y dé su dominio.

51. Un rectángulo tiene un perímetro de 20 m. Exprese el área del rectángulo como función de la longitud de uno de sus lados.

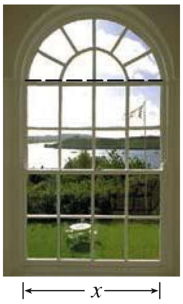
52. Un rectángulo tiene un área de 16 m^2. Exprese su perímetro como función de la longitud de uno de sus lados.

53. Exprese el área de un triángulo equilátero como función de la longitud de uno de los lados.

54. Exprese el área superficial de un cubo como función de su volumen.

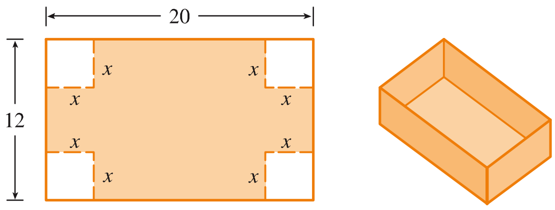
55. Una caja rectangular abierta, con volumen de 2 m^3, tiene una base cuadrada. Exprese el área superficial de la caja como función de la longitud de uno de los lados de la base.

56. Una ventana normanda tiene la forma de un rectángulo coronado por un semicírculo. Si el perímetro de la ventana es de 30 pies, exprese el área A de ella como función del ancho x de la misma.



© Catherine kamow

57. Debe construirse una caja con su parte superior abierta a partir de un trozo rectangular de cartón que tiene las dimensiones de 12 pulgadas por 20 pulgadas, recortando cuadrados iguales de lado x en cada una de las esquinas y, a continuación, doblando los lados como se ilustra en la figura. Exprese el volumen V de la caja como función de x.



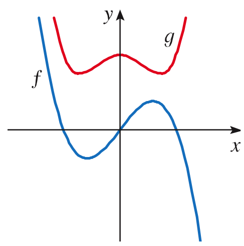
58. Una compañía de taxis cobra dos dólares por la primera milla (o parte de una milla) y 20 centavos de dólar por cada décimo de milla (o parte) subsiguiente. Exprese el costo C (en dólares) de un viaje como función de la distancia x recorrida (en millas), para $0 < x < 2$, y dibuje la gráfica de esta función.

59. En cierto país, el impuesto sobre la renta se evalúa como se indica a continuación. No se paga impuesto sobre ingresos hasta de 10 000 dólares. Cualquier ingreso superior a 10 000 dólares paga un impuesto del 10% del mismo, hasta un ingreso de 20 000 dólares. Cualquier ingreso superior a 20 000 dólares paga impuesto con una tasa del 15%.
(a) Trace la gráfica de la tasa R de impuesto como función del ingreso I.
(b) ¿Cuál impuesto corresponde a un ingreso de 14 000 dólares y a otro de 26 000 dólares?
(c) Trace la gráfica del impuesto total correspondiente T como función del ingreso I.

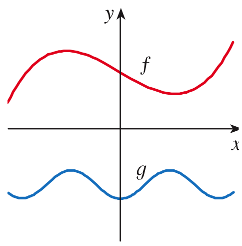
60. Las funciones del ejemplo 10 y de los ejercicios 58 y 59(a) se conocen como *funciones escalones* porque sus gráficas parecen escaleras. Dé otros dos ejemplos de funciones escalones que surjan en la vida cotidiana.

61–62 Se muestran las gráficas de f y g. Determine si cada función es par, impar o ninguna de las dos. Explique su razonamiento.

61.

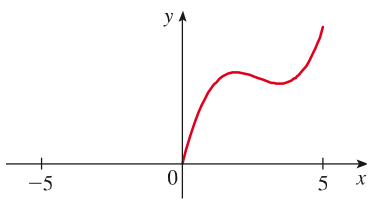


62.



63. (a) Si el punto (5, 3) está sobre la gráfica de una función par, ¿cuál otro punto también debe estar sobre la gráfica?
(b) Si el punto (5, 3) está sobre la gráfica de una función impar, ¿cuál otro punto también debe estar sobre la gráfica?

64. Una función f tiene el dominio $[-5, 5]$ y se muestra una parte de su gráfica.
(a) Complete la gráfica de f si se sabe que ésta es par.
(b) Complete la gráfica de f si se sabe que ésta es impar.



65–70 Determine si f es par, impar o ni par ni impar. Si tiene una calculadora graficadora, úsela para verificar de manera visual su respuesta

65. $f(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$

66. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^4 + 1}$

67. $f(x) = \dfrac{x}{x + 1}$

68. $f(x) = x|x|$

69. $f(x) = 1 + 3x^2 - x^4$

70. $f(x) = 1 + 3x^3 - x^5$